1

ریاضی مهندسی : ۱۳۹۲/۹/۲۱

---

(۱۲۴) مرتبه یک ماتریس چگونه حساب می شود؟
Rank

تعداد سطرهایی که از یکدیگر مستقل هستند یعنی به صورت ترکیب خطی از یکدیگر نیستند.

---

(۱۲۵) مرتبه یک ماتریس چگونه بدست می آید؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c & e \\ 0 & 0 & d & f \\ 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس را بالا مثلثی می کنیم، تعداد درایه هایی که زیر قطر اصلی

صفر هستند ولی در آن سطر ستون دیگری مثل این
وجود ندارد درای شماریم.

۱۲۶) مرتبه ماتریس زیر چند است؟ مفهومش را بگوئید؟

$$\begin{array}{c} \\ -2 \\ -3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

مرتبه دو است.

یعنی از ۴ ستون ۲ ستون مستقل هستند و باقی
به صورت ترکیب خطی از این دو ستون
بدست می آیند. یعنی

$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

مستقل هستند و باقی یعنی $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ از ترکیب

خطی این دو ستون بدست می آیند. یعنی

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \\ ۶ \end{bmatrix} = ۲ \times a_{۲}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = ۱ \times a_{۲}$$

---

۱۲۷ مرتبه ماتریس و ستونهای مستقل را بدست آورید و نشان دهید ستونهای دیگر ترکیب خطی ستونهای مستقل هستند؟

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

پس از بالا مثلثی

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مرتبه ۳ و مستقل ها

$a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$a_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ و

غیر مستقل ها

$$a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \times a_1$$

$$a_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} = x \times a_1 + y \times a_2 + z \times a_5 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

---

۱۲۸) چرا کارهای انجام شده بر روی ماتریس به صورت سطری است مانند مرتبه و ... ؟

فرض کنید معادله زیر را داریم:

$$\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x+y+2z=5 \\ 3x+3y+2z=2 \end{cases}$$

مرتبه را بدست می آوریم و سطرهای مستقل

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{-1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array}$$

a_1 و a_2 و a_3 مستقلند. یعنی a_4 به صورت ترکیب خطی از a_1 و a_2 و a_3 است. یعنی

$$x \times a_1 + y \times a_2 + z \times a_3 = a_4$$

این یعنی همان معادله

پس معادله ① جواب دارد.

(۱۲۹) تعداد جوابهای یک m معادله n مجهول را چگونه $(m \geq n)$ می توان از روی مرتبه ماتریس بدست آورد؟

همه حالتهائی که پائین می نویسیم یک مفهوم دارند. پس هرکدام از حالتهای زیر برقرار بود، دستگاه معادله حداقل ۱ جواب دارد؟

① ستون آخر (ستون معلومات) غیرمستقل باشد.

② $\operatorname{rank}\Big[\underbrace{A}_{\text{ضرائب مجهولات}} \,\vdots\, \underbrace{b}_{\text{معلومات}}\Big] = \operatorname{rank}[A]$ (ستون b در rank نیاید)

③ در بالا مثلثی شده $[A \,\vdots\, b]$ سطری مانند زیر نباشد

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \alpha \end{bmatrix} \quad \alpha \neq 0$$

۱۳۰) رابطه $rank[A \vdots b] = rank[A]$ نشان می دهد دستگاه چند جواب دارد؟

این رابطه نشان می دهد که دستگاه جواب دارد:

حالت کلی
- صفر جواب ⇐ جواب ندارد
- ۱ جواب
- بی شمار جواب

۱ جواب و بی شمار جواب ⇐ جواب دارد ✓

---

۱۳۱) در چه صورت دستگاه معادله دقیقاً ۱ جواب دارد؟

$$rank\left[\underbrace{A_{n\times n}}_{\text{مساوی}} \vdots b_{n\times 1}\right] = rank\left[A_{n\times n}\right] = n$$

۱۳۲) دستگاه زیر چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 2 \\ x + 2y + 3z = 3 \\ x + z = -3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ -1 \\ -1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

جواب ندارد.

(۱۳۳) اگر در مثلث سازی به سطری کلاً صفر رسیدیم، چه می‌شود؟

آن سطر بی‌تأثیر است و باید به سطر آخر برود.